FISICA PROPEDEUTICA

- Concetti introduttivi: la fisica e le leggi della natura, unità di misura, analisi dimensionale, conversione unità di misura, precisione e cifre significative.

- Elementi di teoria degli errori: media, deviazione standard, errore assoluto, errore relativo, somma e prodotto di errori associati a misura.

- Richiami di trigonometria: angoli e radianti, le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente, le relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo.

- Vettori e Scalari: componenti di un vettore, somma e sottrazione di vettori, prodotto scalare e prodotto vettoriale

La Matematica in Fisica

FISICA: tentativo dell'essere umano di **descrivere** in maniera **quantitativa** la **natura** ed il mondo che abbiamo attorno

La descrizione viene fatta per mezzo di relazioni tra oggetti utilizzando le strutture logiche date dalla **matematica**

ATTENZIONE

la fisica NON coincide con la matematica

ogni variabile o oggetto che entra in gioco
in una equazione della fisica
è una entità reale che è possibile **osservare** e **misurare**

Matematica

$F = -Kx$

$x \Rightarrow$ variabile indipendente $\in \Re$

$K \Rightarrow$ costante $\in \Re$

$F \Rightarrow$ variabile dipendente $\in \Re$

Fisica

$F = -Kx$

x $\Rightarrow$ allungamento della molla

$K \Rightarrow$ costante elastica della molla

$F \Rightarrow$ Forza esercitata dalla molla

La fisica parte dalla **realtà** e
per mezzo del formalismo matematico
descrive e/o prevede dei fenomeni **reali**

forza *esercitata dalla molla è direttamente* ***proporzionale***
all' ***allungamento***
coefficiente di proporzionalità K si dice costante elastica

Indagine fisica

* **Osservazione del fenomeno** [in natura o in laboratorio]
  - **Analisi** e **Misura**
    - delle sue caratteristiche
    - delle circostanze che lo producono
    - dei fattori che lo influenzano

* **Il fenomeno deve essere ripetibile**
    - posso fare e rifare la misura (aumentando la precisione)
    - posso variare le condizioni ed i parametri iniziali

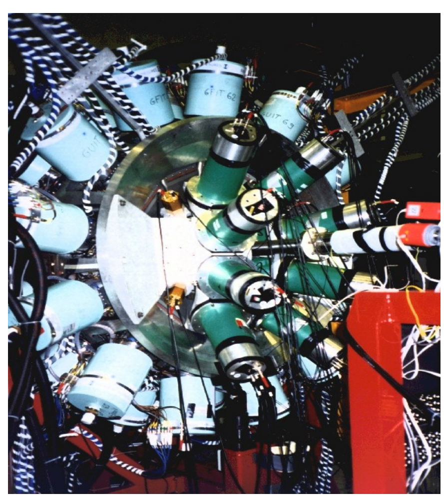
* **Ricerca di leggi matematiche** [modelli/teorie]

  capaci di interpretare il maggior numero di fatti sperimentali
  col minor numero di **ipotesi** possibili

> modello/teoria devono avere un certo **potere predittivo**,
> devono essere cioè in grado di prevedere
> come si comporterà la natura in una certa situazione
> sulla base dei dati sperimentali ottenuti in un' altra situazione

* **Verifica sperimentale**

  qualsiasi risultato ottenuto
  DEVE essere
  verificabile sperimentalmente



Requisiti delle Informazioni fisiche

* Comunicabilità dell'informazione

- Unità di Misura - Sistema Internazionale (S.I.)

* Attendibilità dell'informazione

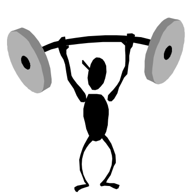
- Cifre significative

* Coerenza dell'informazione

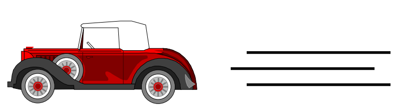
- Calcolo Dimensionale

* Completezza dell'informazione

- Grandezze Scalari e Vettoriali
- Calcolo vettoriale



Peso = 57.3 Kg



Velocità ??

Unità di Misura
Sistema Internazionale
[S.I. o M.K.S.]

• **Lunghezza**	**Metro**	**m**
• **Massa (peso)**	**Chilogrammo**	**Kg**
• **Tempo**	**Secondo**	**s**
• Temperatura ………………………..	Kelvin	K
• Corrente elettrica …………………..	Ampere	A

Tutte le altre grandezze (**grandezze derivate**) si misurano per mezzo di queste Unità, derivano cioè dalla combinazione di queste grandezze fondamentali

• Velocità	$\mapsto$	m/s
• Accelerazione	$\mapsto$	m/s^2
• Volume	$\mapsto$	m^3
• Forza (Newton)	$\mapsto$	$Kg\ m / s^2$

Attenzione:

è possibile **sommare** e **sottrarre**
SOLO ed **ESCLUSIVAMENTE**
quantità dello stesso tipo

Il valore di una grandezza fisica è talvolta un **numero molto grande** o **molto piccolo**

Introduco **multipli** o **sottomultipli** delle unità di misura secondo **potenze di dieci**

Prefissi del Sistema Internazionale

- **10^{18} Exa- E**
- **10^{15} Peta- P**
- **10^{12} Tera- T**
- **10^{9} Giga- G** - Gigabyte 10^9 bytes
- **10^{6} Mega- M** - Megabyte 10^6 bytes
- **10^{3} Kilo- k**
- **10^{2} Etto- h**
- **10^{1} Deca- D**
- **10^{-1} Deci- d** - decimetro - 10^{-1} m
- **10^{-2} Centi- c**
- **10^{-3} Milli- m** - millimetro 10^{-3} m
- **10^{-6} Micro- µ**
- **10^{-9} Nano- n** - nanosecondo 10^{-9} s
- **10^{-12} Pico- p** - picosecondo 10^{-12} s
- **10^{-15} Femto- f**
- **10^{-18} Atto- a**

Lunghezza

Per misurare una lunghezza è necessario un **metro campione**:

1799: **metro** è la 10^{-7} parte della distanza tra il Polo Nord e l'Equatore

→ 1960: **metro campione** è una sbarra di Platino Iridio a Parigi

- Ma .. Parigi è lontana dai laboratori del mondo
- Ma .. la sbarra di Parigi non è proprio $1/10^7$ la distanza Polo Nord Equatore (è sbagliata dello 0.023%)

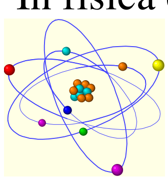
Nuova definizione:

→1983: 1 m = 1 650 763.73 volte la lunghezza d'onda della luce rosso-arancione emessa dal ^{86}Kr

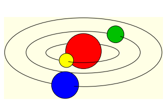
1983: 1 m = distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299792458 di secondo

Limiti sperimentali:

- Direttamente è possibile misurare lunghezze fino a 10 nm
- In fisica entrano in gioco circa **40** ordini di grandezza



10^{-15} m Dimensione di un nucleo (Idrogeno/Protone)

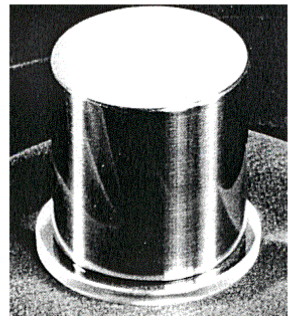


1.4 10^{26} m Distanza tra la Terra e la Quasar più lontana

Massa

Per misurare una massa è necessario una **massa campione**:

Il Campione di massa è un **cilindro di platino iridio** depositato a Parigi



- Ma .. Parigi è lontana dai laboratori del mondo
- Bisogna fare delle copie

  la precisione è ~ 10^{-8} kg... troppo poco

Nuova definizione:.... Non c'è ancora !

In **fisica atomica/nucleare/particelle** si usa **unità di massa atomica u**

1 u = 1/12 del peso di un atomo di ^{12}C

La Relazione u - Kg non è però nota con estrema precisione

1 u = 1.6605402 10^{-27} Kg (troppo imprecisa)

- in fisica entrano in gioco circa **83** ordini di grandezza:

  $m_{elettrone} \sim 9\ 10^{-31}$ Kg $\rightarrow$ $m_{universo} \sim 10^{53}$ Kg

- la massa ha una definizione **dinamica** (massa inerziale)

  ed una definizione **gravitazionale** (massa gravitazionale)

$$\overline{F} = m_{in}\overline{a}$$

$m_{in} \Rightarrow$ massa inerziale

$$\overline{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

$m_1, m_2 \Rightarrow$ massa gravitazionale

La teoria della relatività generale ha come **ipotesi** di partenza che la massa inerziale e quella gravitazionali siano esattamente la stessa cosa

Tempo

• Ciò che si misura non è il tempo ma piuttosto un **intervallo di tempo**

• Per misurare un tempo è necessario un orologio, cioè un oggetto che conta qualcosa, p.e. le oscillazioni di un fenomeno periodico

- pendolo (l'errore è circa di un secondo per anno)
- rotazione della terra (l'errore è circa di 1 ms ogni giorno)
- un quarzo (l'errore è circa di 1 s ogni 10 anni)

Nuova definizione:

orologio atomico Cs (errore circa 1 s ogni 300000 anni)

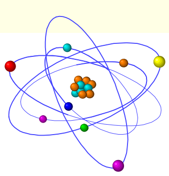
1 secondo = 9 192 631 770 oscillazioni della radiazione emessa dal cesio

Maser a idrogeno (errore 1 s ogni 30 10^6 anni)

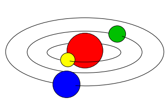
Limiti sperimentali:

• Direttamente è possibile misurare intervalli di tempo fino a 10 ps

• In fisica entrano in gioco circa **60** ordini di grandezza

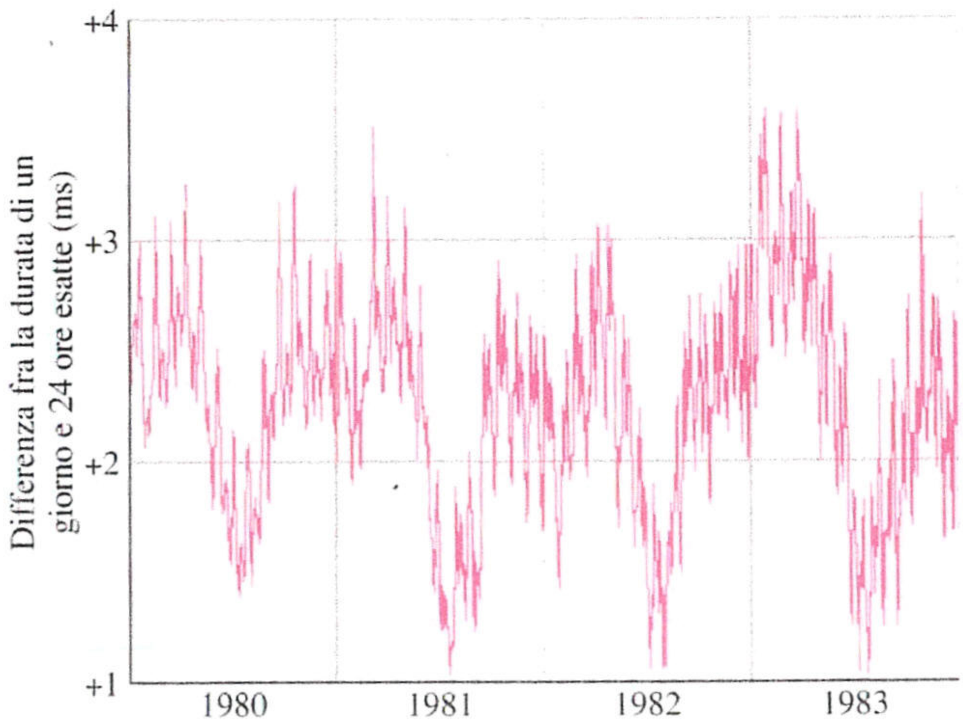


10^{-23} - 10^{27} s Fenomeni nucleari



5 10^{17} s Vita dell'universo

variazioni della lunghezza del giorno
[sulla base della rotazione terrestre]



scarto giornaliero **≈ 3 ms**
[rispetto alla media]

$$\frac{0.003s}{60 \cdot 60 \cdot 24} = \frac{0.003s}{86400} = 3.47 \cdot 10^{-8} = 0.00000347\%$$

Variazione percentuale giornaliera

Densità

massa per unità di volume

$$\rho \underset{def}{\equiv} \frac{m}{V}$$

In fisica entrano in gioco circa **40** ordini di grandezza

Sostanza od oggetto	Massa volumica (kg/m^3)
Spazio interstellare	10^{-20}
Massimo «vuoto» raggiungibile in laboratorio	10^{-17}
Aria: a 20 °C e 1 bar	1.21
a 20 °C e 50 bar	60.5
Polistirolo espanso	$3 \cdot 10^1$
Acqua: a 20 °C e 1 bar	$0.998 \cdot 10^3$
a 20 °C e 50 bar	$1.000 \cdot 10^3$
Acqua del mare: a 20 °C e 1 bar	$1.024 \cdot 10^3$
Sangue	$1.060 \cdot 10^3$
Ghiaccio	$0.917 \cdot 10^3$
Ferro	$7.9 \cdot 10^3$
Mercurio	$13.6 \cdot 10^3$
Terra: valor medio	$5.5 \cdot 10^3$
nucleo	$9.5 \cdot 10^3$
crosta	$2.8 \cdot 10^3$
Sole: valor medio	$1.4 \cdot 10^3$
nucleo	$1.6 \cdot 10^5$
Stella nana bianca (nucleo centrale)	10^{10}
Nucleo dell'uranio	$3 \cdot 10^{17}$
Stella di neutroni (nucleo centrale)	10^{18}
Buco nero (1 massa solare)	10^{19}

massa atomica = (N+Z) u = A u

$(\text{m atomica})_{Al} = 27\ u$
$(\text{m atomica})_{Pb} = 207\ u \Rightarrow m_{Pb}/m_{Al} = 7.67$

$\rho_{Al} = 2.7\ 10^3\ kg/m^3$
$\rho_{Pb} = 11.3\ 10^3\ kg/m^3 \Rightarrow \rho_{Pb}/\rho_{Al} = 4.19$

discrepanza dovuta a distanze fra atomi e a struttura cristallina

mole = quantità di sostanza che contiene numero di atomi/molecole pari al **numero di Avogadro** $N_A = 6.022\ 10^{23}$

il Numero di Avogadro è definito tale che ***1 mole ^{12}C*** *abbia* ***massa*** *pari a* ***12 g***

mole = quantità di sostanza che contiene numero di atomi/molecole pari al **numero di Avogadro** $N_A = 6.022\ 10^{23}$

il Numero di Avogadro è definito tale che ***1 mole*** ^{12}***C*** *abbia* ***massa*** *pari a* ***12 g***

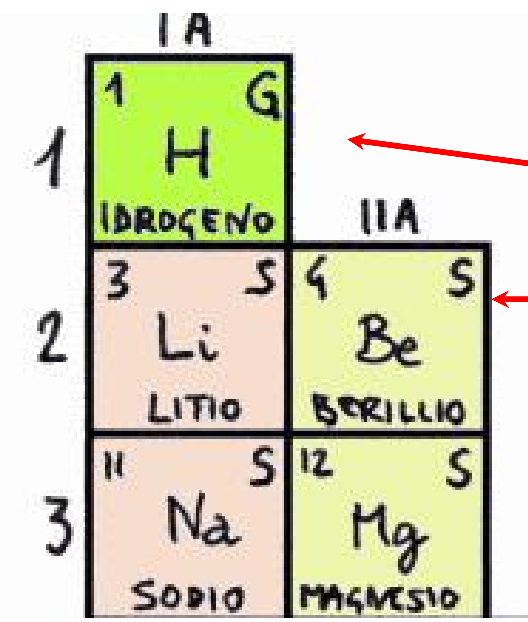
Calcolo del **numero di moli** di una sostanza di massa M_{camp}:

$$n = \frac{M_{camp}}{M}$$

$$M = m\,N_A$$

M_{camp} = peso sostanza
M = peso di una mole [peso molare]
m = peso di una molecola

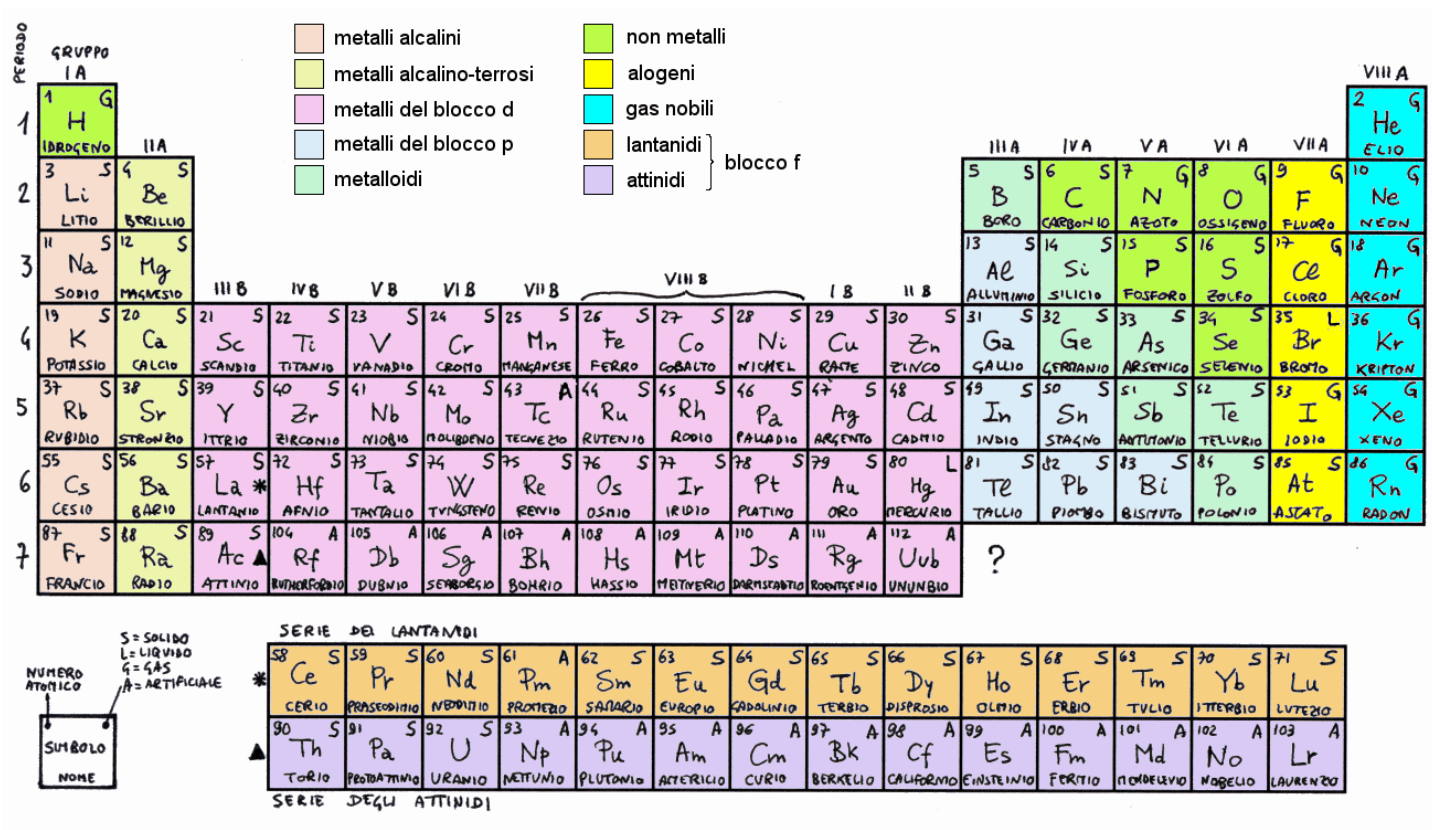
Il **peso M** di una mole di una sostanza si ricava dalla **tabella periodica** degli elementi



M_H = 1.00794 g
M_{H^2} = 2 · 1.00794 g
M_{Be} = 9.0122 g

$M_{C^{12}} \underset{def}{=} 12$ g

Tavola periodica degli elementi
[Tavola di Mendeleev]



elementi con simili **proprietà chimico-fisiche** appaiono nella **stessa colonna**

Analisi Dimensionale

dimensione $\mapsto$ denota la **natura** fisica di una grandezza;
ad ogni grandezza associo una **unità di misura**

- le **dimensioni** possono essere trattate come **grandezze algebriche**:

  posso sommare e sottrarre solo grandezze con le stesse dimensioni

  esempio: i **metri** si possono sommare solo ai **metri**
  non posso sommare m con Km o con s !

- ogni **equazione deve** essere **dimensionalmente** corretta:

  ciascun membro di un'equazione deve avere le **stesse** dimensioni

Lunghezza $\mapsto$ [L] $\mapsto$ m
Massa $\mapsto$ [M] $\mapsto$ Kg
Tempo $\mapsto$ [T] $\mapsto$ s

esempio:

legge oraria	$x = \frac{1}{2} a t^2$
Dimensioni	$[L] = [L/T^2][T^2]$
unità di misura	$m = m/s^2 \cdot s^2 = m$

Attenzione

Numero Puro = Numero senza dimensione

gli argomenti di esponenziali, seni, coseni, logaritmi ..
sono sempre numeri puri !

Conversione delle unità di misura

*Le **unità di misura** si trattano come **grandezze algebriche***

esempio 1

Se un serbatoio di automobile contiene inizialmente 8.01 litri di benzina e viene introdotta benzina alla rapidità di 28.00 litri/minuto, quanta benzina contiene il serbatoio dopo 96 secondi ?

Benzina = Benzina iniziale + Benzina aggiunta

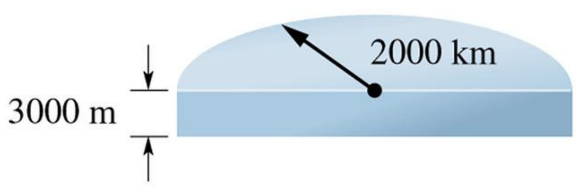
$$\text{Benzina} = 8.01\ \text{litri} + \left(28.00\,\frac{\text{litri}}{\text{minuto}}\right)(96\,\text{secondi}) = 8.01\ \text{litri} + \left(2688\,\frac{\text{litri}}{\text{minuto}}\,\text{secondi}\right)$$

$$\text{Benzina} = 8.01\ \text{litri} + 2688\,\frac{\text{litri}}{60\ \text{secondi}}\,\text{secondi} = 8.01\ \text{litri} + 44.8\,\frac{\text{litri}}{\text{secondi}}\,\text{secondi}$$

Benzina = 8.01 litri + 44.8 litri = 52.81 litri

esempio 2

L'Antartide è di forma quasi circolare, con raggio di 2000 Km. Lo spessore medio dello strato di ghiaccio che la ricopre è di 3000 m. Quanti cm^3 di ghiaccio contiene l'Antartide?



$= 2000\ \text{km} = 2000 \bullet 10^3\ \text{m} = 2 \bullet 10^3\ \text{m}$

$= 3000\ \text{m} = 3 \bullet 10^3\ \text{m}$

$$\begin{aligned} Volume &= \frac{1}{2}\left(\pi r^2 \cdot h\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\pi (2 \cdot 10^6)^2 \cdot 3 \cdot 10^3\right) m^3 \\ &\approx 1.9\ 10^{16}\ m^3 = 1.9\ 10^{16}\left(10^2\ cm\right)^3 \\ &= 1.9\ 10^{22}\ cm^3 \end{aligned}$$

esempio 3

Un'automobile viaggia ad una velocità di 90 km/h, quant'è la sua velocità in m/s?

$1Km = 1000\ m = 10^3\ m$

$1h = 3600\ s$

$$90\ \frac{Km}{h} = \frac{10^3 m}{3600\ s} = \frac{90\ m}{3.6\ s}$$

Per passare da Km/h a m/s devo dividere per 3.6

Per passare da m/s a Km/h devo moltiplicare per 3.6

esempio 4

La densità dell'Alluminio è 2.7 g/cm$^{3.}$ Quant'è la sua densità se la esprimiamo in Kg/m^3 ?

$1g = 10^{-3}\ Kg$

$1cm = 10^{-2}\ m \rightarrow 1cm^3 = 10^{-6} m^3$

$$2.7\ \frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3} Kg}{10^{-6}\ m^3} = 2.7 \times 1000$$

Per passare da g/cm^3 a Kg/m^3 devo moltiplicare per 1000

Per passare da Kg/m^3 a g/cm^3 devo dividere per 1000

Misura

espressione quantitativa *del* ***rapporto***
fra una grandezza ed un'altra ad essa omogenea
scelta come ***unità***

A priori non si conosce il valore di ciò che si misura, al più, si avrà una idea dell' **ordine di grandezza**.

È necessario fornire un **errore**, una stima cioè della possibile differenza tra il valore della misura e quello reale
(che non conosciamo).

Caratteristiche di una misura:

1. espressione **quantitativa;**
2. necessita di una **grandezza** di **riferimento;**
   [metro, Kg, secondo, Newton …]
3. necessita di una **stima** dell'**errore**

Il risultato di una misura **non** consiste **solo** nel valore fornito dallo strumento, ma anche di un **errore** e di una **unità di misura**
[la mancanza di uno di questi termini rende gli altri inutili]

una misura **DEVE** dare una informazione **COMPLETA**
una misura **DEVE** essere ripetibile

massa = $0.23 \pm 0.001\ 10^{-5}$ Kg [informazione completa]
massa = $0.230\ 10^{-5}$ Kg [informazione **non** completa]

esempio:

voglio calcolare il **peso** di una **fetta di torta**

uso una normale pesa di cucina, precisa al grammo:

310 g di farina	310 +
5 uova (1 uova pesa 75 grammi)	375 +
150 g di zucchero	150 +
15 grammi di lievito	15 =
	850 g

Se il peso della torta è 850 g e la divido in **6 fette** ogni fetta peserà (uso la calcolatrice)

$$850 : 6 = 141.6666667 \quad g$$

In altre parole secondo questo calcolo dovrei conoscere il peso della fetta di torta al **milionesimo di grammo** !!!!!

C'e' qualcosa che non va !

[ovviamente la calcolatrice funziona perfettamente!]

Siamo noi che abbiamo sbagliato a scrivere le **cifre significative** del peso della fetta di torta

Precisione e Cifre Significative

Un numero (una misura) è una informazione !

E’ necessario conoscere la **precisione** e l’**accuratezza** dell’informazione.

La **precisione** di una misura è contenuta nel **numero di cifre significative** fornite o, se presente, nell’**errore** di misura.

Una **manipolazione numerica** non può nè aumentare nè diminuire la precisione di una informazione !

Il **numero** di cifre significative si calcola contando le cifre, a partire dalla prima cifra non nulla, **da sinistra verso destra**.

esempio:

⇒ 187.3	4 cifre significative
⇒ 10.0000	6 cifre significative
⇒ 10.0101	6 cifre significative
⇒ 1	1 cifra significativa
⇒ 1234.584	7 cifre significative
⇒ 0.00001	1 cifra significativa

Attenzione: non confondere il n. di cifre significative con il n. di cifre decimali!!!

- Una **manipolazione numerica** non può
  nè aumentare nè diminuire la precisione
  di una informazione !

- **moltiplicando** o **dividendo** due numeri
  il risultato non può avere più cifre significative
  del fattore **meno** preciso

- **addizioni** e **sottrazioni:**
  l'ultima cifra significativa del risultato
  occupa la stessa posizione relativa
  all'ultima cifra significativa degli addendi

[⇒ nella somma non è importante il numero delle cifre significative ma la posizione di queste]

esempi:

esempio torta

$$850 : 6 = 142\ g$$

altri esempi

$$123.450 * 12.3 = 1.52 * 10^3$$

$$123.450 * 12.30 = 1.518 * 10^3$$

$$187.3 + 1234.584 = 1421.8$$

$$\begin{array}{rl} 187.\underline{3} & + \\ 1234.58\underline{4} & = \\ \hline 1421.884 & \Rightarrow\ 1421.\underline{9} \end{array}$$

Esercizi di riepilogo

1) Dimostra che $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ è dimensionalmente consistente. La quantià x e x_0 sono distanze, v_0 è una velocità, a è un'accelerazione e t è il tempo.

2) Un magazzino è lungo 20,0 Yard, largo 10,0 Yard e alto 15 piedi. Quant'è il suo volume in unità S.I?

3) Il sangue nell'aorta di un uomo può avere una velocità di 35 cm/s. Quanto vale questa velocità in m/h

4) Esprimi in millimetri e in kilometri la lunghezza di un tipico batterio *E.coli* lungo circa 5 micrometri

5) La velocità della luce nel vuoto è approssimativamente 0,3 Gm/s. Esprimi la velocità in metri al secondo.

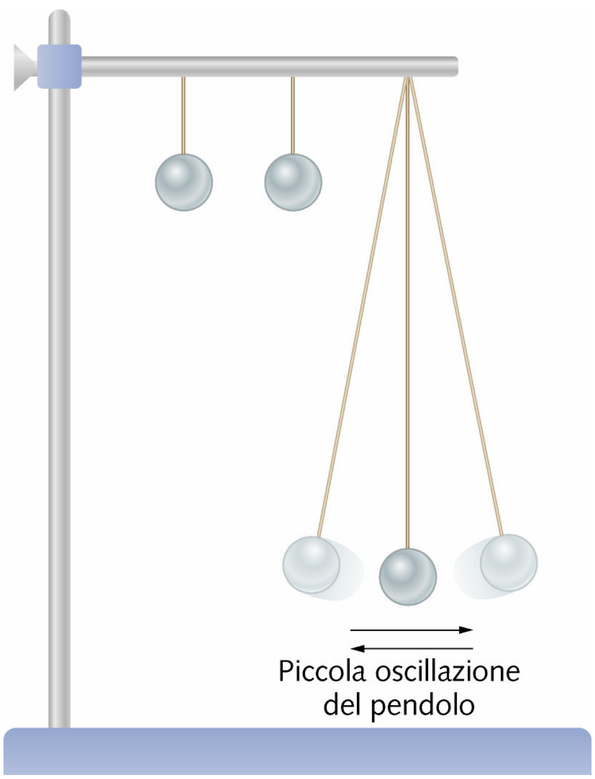
6) La velocità della luce con 5 cifre significative è $2.9979 \bullet 10^8$ m/s. Calcola quanto vale la velocità della luce con 3 cifre significative.

Errori di misura e operazioni di media

La misura di una grandezza fisica è sempre affetta da una certa imprecisione.

La differenza tra il valore misurato di una certa grandezza e il valore reale viene chiamato ERRORE

Esempio: Vogliamo misurare il tempo di oscillazione di un pendolo con un cronometro in grado di apprezzare il centesimo di secondo.



Risultato 1^ misura: 2.30 s

Anche se abbiamo operato con la massima cura, non possiamo affermare che la grandezza da noi misurata abbia realmente questo valore. Tenendo conto della sensibilità del cronometro, possiamo dire che la misura ha un valore compreso tra 2,29s e 2,31 s

E quindi scriveremo (2,30 ± 0,01)

Se eseguiamo la misura 10 volte, potremmo trovare i seguenti risultati:

# prove	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tempo	2,30	2,33	2,28	2,35	2,30	2,32	2,25	2,35	2,32	2,26

A che cosa possiamo addebitare l'errore in questo tipo di misura?

Esistono due tipi di errori:

1. Le incertezze sperimentali che possono essere rivelate ripetendo le misure sono chiamate **errori "casuali".**

- Possibilità di trattamento statistico

2. **Errori sistematici**: non possono essere trattati statisticamente

Alcuni Esempi

Determinazione del tempo di oscillazione del pendolo

- Poss. sorgente di errore **casuale**: tempo di reazione nel far partire il cronometro.

↓

Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare il periodo di oscillazione.

- Poss. sorgente di errore **sistematico**: staratura dello strumento (marcia costantemente lento).

↓

La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

Misura di una lunghezza con un righello.

- Poss. sorgente di errore **casuale**: interpolazione tra due tacche della scala.

Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lettura.

- Poss. sorgente di errore **sistematico**: deformazione del righello.

✓ **In generale le sorgenti di errori casuale sono:**

- Piccoli errori di giudizio dell'osservatore;
- problemi di risoluzione spaziale;
- piccoli disturbi dell'apparato di misura (p.es. vibrazioni, rumore elettrico, interferenza EM);
- parallasse (per 50% errore di tipo sistematico)
- ecc.

✓ **In generale le sorgenti di errori sistematico sono:**

- Errato o mancato azzeramento degli strumenti;
- Perdita di calibrazione degli strumenti;
- parallasse (per 50% errore di tipo casuale)
- ecc.

Media e deviazione standard

Torniamo all'esempio della misura del tempo di oscillazione del pendolo in cui abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

# prove	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tempo	2,30	2,33	2,28	2,35	2,30	2,32	2,29	2,35	2,32	2,26

Qual è la miglior stima di *x* ?

Si può dimostrare che la miglior stima, $\boldsymbol{x_{best}}$, di $\boldsymbol{x}$ è la media:

$$x_{best} = \frac{2,30 + 2,33 + 2,28 + 2,35 + 2,30 + 2,32 + 2,29 + 2,35 + 2,32 + 2,26}{10} = 2.31$$

In generale, per N misure indipendenti della grandezza $\boldsymbol{x}$, la sua miglior stima, $\boldsymbol{x_{best}}$:

$$x_{best} = \mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots.. + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Scarto o deviazione

Lo **scarto** indica di quanto il valore $\boldsymbol{x_i}$ misurato differisce dalla media.

E' la differenza tra la misura stessa e la media $s = x - \mu$

# prova	Valore misurato x_i	Scarto s_i
1	2,30	-0.01
2	2,33	+0.02
3	2,28	-0.03
4	2,35	+0.04
5	2,30	-0.01
6	2,32	+0.01
7	2,29	-0.02
8	2,35	+0.04
9	2,32	+0.01
10	2,26	-0.05

$$\sum s_i = 0$$

Dato che le misure sono sia superiori sia inferiori alla media
Abbiamo scarti positivi e negativi.
Si dimostra che la somma degli scarti da sempre esattamente 0.

Deviazione standard o Scarto quadratico medio

Poiché la media degli scarti è sempre nulla, essa non è un indicatore significativo. Al contrario, ha un significato statistico importante lo scarto quadratico medio o Deviazione standard.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots\ldots + s_N^2}{N-1}}$$

Il risultato di una grandezza ottenuta da una serie di misure ripetute verrà quindi espresso attraverso la sua media e la sua deviazione standard

$$\boxed{x = \mu \pm \sigma_x}$$

Come si combinano gli errori su 2 misure?

Somma di misure

A volte può capitare di dover sommare tra loro due differenti misure. Ad esempio la larghezza di un armadio e la larghezza di una scrivania per verificare se è possibile accostarli uno di fianco all'altra lungo una parete.

Si dimostra che la migliore stima per l'errore sperimentale sulla somma di due grandezze è **la somma delle deviazioni standard**.

larghezza armadio x_a= 90 cm, dev. standard armadio σ_a= 1 cm

larghezza scrivania x_s= 120 cm, dev. standard scrivania σ_s= 3 cm

Larghezza totale $x = x_a + x_s = 90+120 = 210$ cm,

Dev. standard totale $\sigma = \sigma_a + \sigma_s = 1 + 3 = 4$ cm

Prodotto di misure

Volendo calcolare l'area di una stanza è necessario moltiplicare la misura lineare di un lato della stanza per la misura lineare dell'altro lato della stanza. A questo punto come si "propaga" l'errore sulla misura della superficie della stanza?

Per farlo è necessario introdurre un nuovo concetto, quello di **errore relativo**. L'errore relativo è un indicatore che aiuta a capire quanto è precisa una misura. E' evidente che la misura della lunghezza di una strada con una precisione di 3 cm è una misura più precisa della misura della lunghezza di una scrivania con una precisione di 1 cm.
L'errore relativo paragona l'errore compiuto o **errore assoluto** con la misura compiuta. Si definisce

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_x}{\overline{x}}$$

Si dimostra che la migliore stima per la "propagazione" degli errori nel caso del prodotto di due misure si ottiene **sommando gli errori relativi** delle misure stesse.

Esempio

Supponiamo di voler misurare l'area di una stanza con le seguenti di dimensioni:

Larghezza 3 m ± 4 cm
Profondità 4.5 m ± 3 cm

Calcolo gli errori relativi di ogni misura:

σ_{rel} larghezza = 0.04m / 3m = 0.013
σ_{rel} profondità = 0.03 m / 4.50 m = 0.006

AREA STANZA 13.5 m^2
ERRORE REL. AREA 0.013 + 0.006 = 0.019

Una volta noto l'errore relativo è possibile andare a calcolare l'errore assoluto da associare alla misura invertendo la

relazione $\sigma_{rel} = \dfrac{\sigma_x}{\bar{x}} \Rightarrow \sigma_x = \sigma_{rel} \times \bar{x}$

ERRORE ASSOLUTO STANZA: $0.019 \times 13.5\ m^2 = 0.26\ m^2$

AREA STANZA: $13.5\ m^2 \pm 0.26\ m^2$

Esercizi di riepilogo

1) Calcola la superficie di un tavolo le cui misure sono: $x = (80.2 \pm 0.2)$ cm e $y = (120.1 \pm 0.2)$

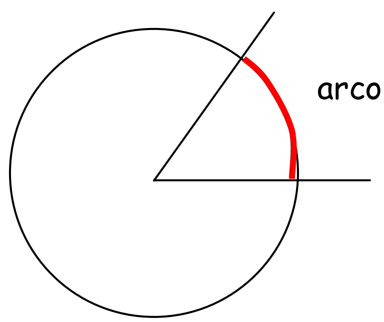
2) Calcola la media e la deviazione standard relativa alle seguenti misure
25,8 25,9 26,2 25,4 25,7 25,8 25,7 26,0 26,1

3) La misura della lunghezza di un'asta è $l = (35.6 \pm 0.2)$ cm. Quant'è l'errore relativo e l'errore percentuale su questa misura?

4) Le dimensioni di una scatola sono $a = (35.4 \pm 0.2)$ cm e $b = (15.4 \pm 0.2)$ cm e $c = (22.4 \pm 0.2)$ cm.
Qual è la misura del volume della scatola?
Quali sono l'errore relativo e l'errore percentuale sul volume della scatola?
Qual è l'errore assoluto?

Richiami di trigonometria

La trigonometria studia gli angoli e la loro misurazione, e le relazioni fra gli elementi di un triangolo o di una qualsiasi figura poligonale.
Iniziamo con lo studiare alcune definizione di base prima di passare alle diverse applicazioni.
Si definisce **angolo** ciascuna delle due parti nelle quali un piano viene diviso da due semirette aventi la stessa origine. Le due semirette sono dette lati dei due angoli e l’origine comune il loro vertice.
Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, si chiama **arco** quella parte di circonferenza, interna all'angolo, avente per estremi i punti di intersezione con i lati dell'angolo stesso.



In trigonometria gli angoli si misurano convenzionalmente in radianti.
Il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza,di raggio arbitrario,che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso.
Consideriamo un angolo $\beta°$ qualunque e una circonferenza con centro nel vertice dell'angolo,i lati di questo angolo intercetteranno sulla circonferenza,che supporremo di raggio **r**, un arco di lunghezza **x**. Facendo una semplice proporzione abbiamo :

$$\mathbf{x : 2\pi\, r = \beta\,° : 360°}$$

da cui:

$$\mathbf{x = (2\pi\, r \,.\, \beta\,°)/ 360°}$$

e, semplificando e ponendo **r = 1**:

$$x = \pi \beta° / 180° \quad (1)$$

Facciamo un esempio: sia $\beta° = 45°$,sostituendo in (1) avrò:

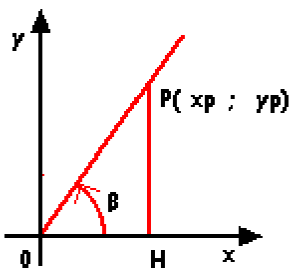
$$x = \pi 45° / 180°$$
$$x = \pi/4$$

Questo tipo di misurazione, **assolutamente equivalente a quello usuale in gradi sessagesimali**, si dice **in radianti**. Quello sopra esposto è il metodo pratico che consente di passare dalla misura in gradi sessagesimali a quella in radianti; naturalmente, nota la misura in radianti dell'angolo, si può procedere a ritroso trovando quella in gradi.
Riportiamo qui di seguito i valori in radianti di alcuni angoli in particolare:

GRADI	0°	18°	30°	45°	60°	90°	135°	150°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\pi/10$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Funzioni trigonometriche

Le funzioni nelle quali la variabile indipendente è un angolo (o un arco) vengono dette trigonometriche.
Per definire le funzioni goniometriche elementari si consideri fisso il lato di origine degli angoli (identificato, nel caso del riferimento cartesiano ortogonale xOy, col semiasse positivo delle ascisse) e variabile il secondo.
Si consideri ora nella seguente figura l'angolo orientato **β** il cui primo lato coincide appunto col semiasse positivo delle ascisse e il secondo è la semiretta **r**



sia **P** un generico punto della semiretta **r**,siano x_p e y_p le sue coordinate e sia **OP** la distanza assoluta di **P** dall'origine **O**. I quattro rapporti:

$$\frac{y_P}{OP} \qquad \frac{x_P}{OP} \qquad \frac{x_P}{y_P} \qquad \frac{y_P}{x_P}$$

non dipendono dalla posizione di P su r. Essi dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo β ; sono dunque funzioni di β. I loro nomi sono:

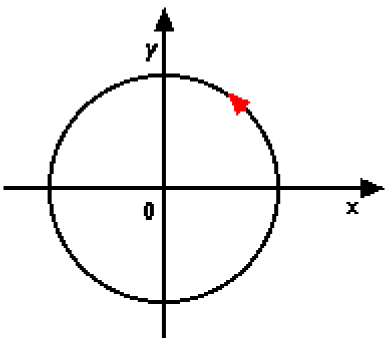
SENO DI β	COSENO DI β	TANGENTE DI β	COTANGENTE DI β
$\sin\beta = \frac{y_P}{OP}$	$\cos\beta = \frac{x_P}{OP}$	$tg\beta = \frac{y_P}{x_P}$	$ctg\beta = \frac{x_P}{y_P}$

Come si può facilmente verificare, tra le dette quattro funzioni di uno **stesso angolo β** intercorrono le seguenti relazioni:

$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = tg\beta$	$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = ctg\beta$	$\frac{1}{ctg\beta} = tg\beta$	$\frac{1}{tg\beta} = ctg\beta$

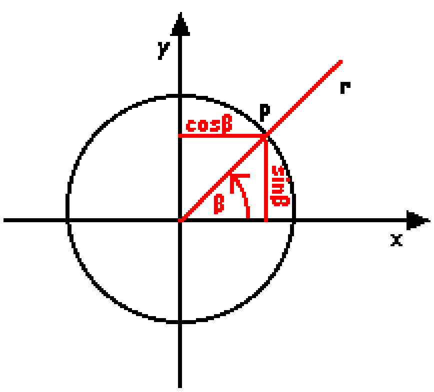
La circonferenza goniometrica

Si chiama **CIRCONFERENZA GONIOMETRICA** una circonferenza orientata alla quale è associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la cui origine coincide con il centro della circonferenza stessa e la cui unità di misura è assunta uguale al raggio di quest'ultima.



N.B.
IL SENSO POSITIVO DI PERCORSO SULLA CIRCONFERENZA E', CONVENZIONALMENTE, QUELLO ANTIORARIO.

Ciò premesso si chiamano **SENO** e **COSENO** dell'angolo orientato β (o dell'arco orientato AP) rispettivamente **l'ordinata** e **l'ascissa** di **P**:

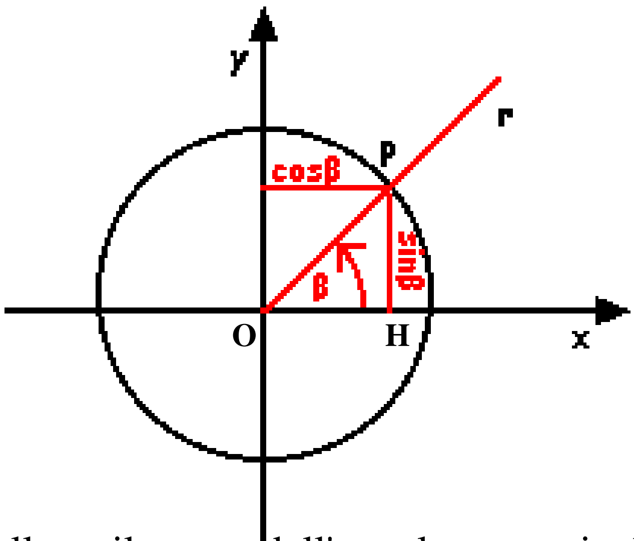


le definizioni sopra date coincidono con quelle date in precedenza, infatti sostituendo in quelle **OP = 1** si avrà:

$$sen\beta = \frac{y_p}{OP} = \frac{y_p}{1} = y_p \qquad \cos\beta = \frac{x_p}{OP} = \frac{x_p}{1} = x_p$$

Prima relazione fondamentale della trigonometria

Siano x e y le coordinate di un punto P sulla circonferenza goniometrica (x l'ascissa e y l'ordinata, P=(x, y)).



Allora il **seno** dell'angolo α equivale alla coordinata y (ordinata) e il **coseno** di α equivale alla coordinata x (ascissa).
Nella figura i punti P O H formano un triangolo rettangolo dove l'ipotenusa vale 1 (per definizione la circonferenza goniometrica ha raggio unitario) e i cateti OH e PH valgono rispettivamente cos α e sen α.
Utilizzando il teorema di Pitagora possiamo allora scrivere che

$$PH^2 + OH^2 = OP^2$$

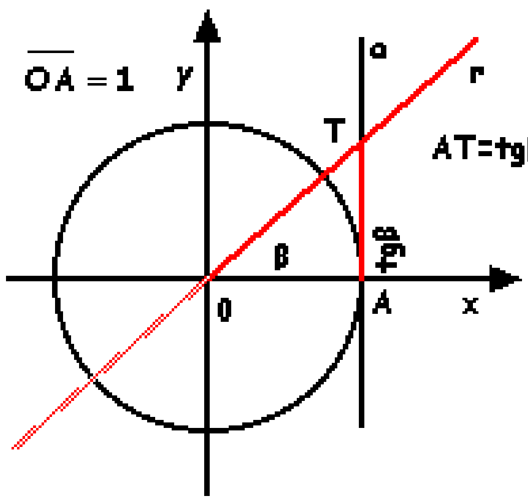
$$\frac{PH^2}{OP^2} + \frac{OH^2}{OP^2} = 1$$

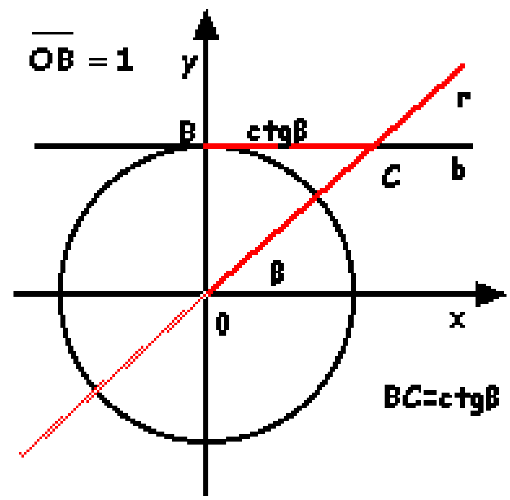
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

e questo vale per qualsiasi angolo

Le funzioni tangente e cotangente

Si considerino ora le rette **a** e **b** tangenti la circonferenza goniometrica nei punti **A** e **B**, e siano **T** e **C**, rispettivamente, i punti d'intersezione con la semiretta **r** uscente dall'origine:



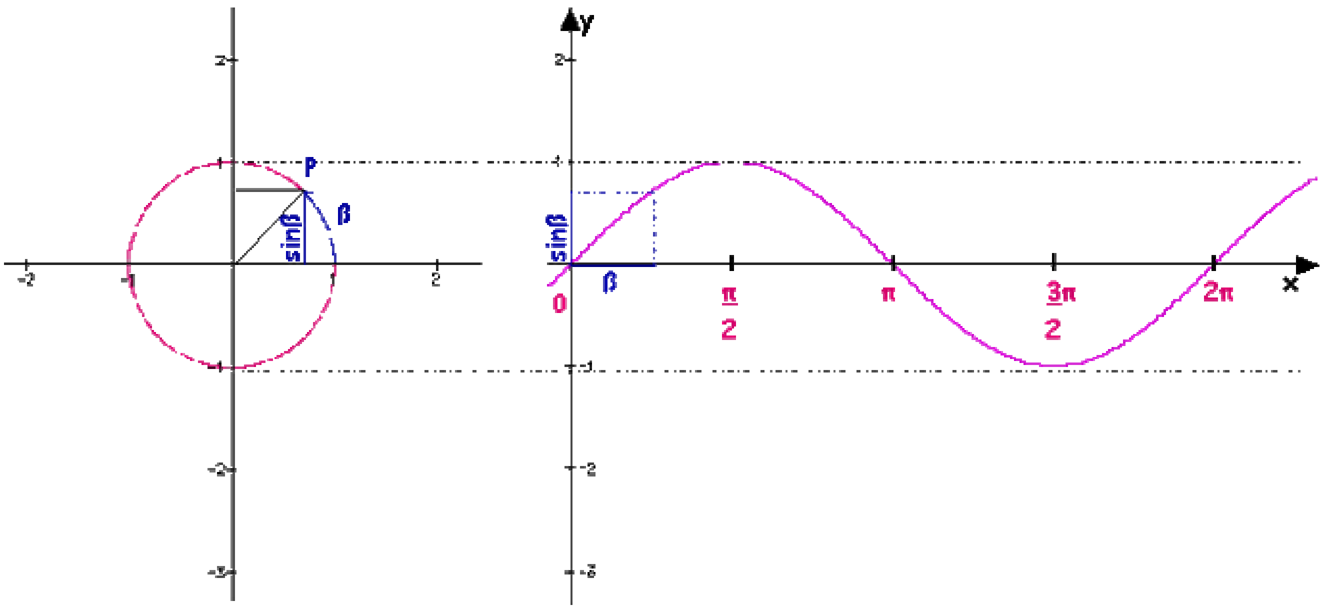


verrà detta **TANGENTE** di β **l'ordinata di T** e **COTANGENTE** di β (**l'ascissa di C**) . Come per seno e coseno:

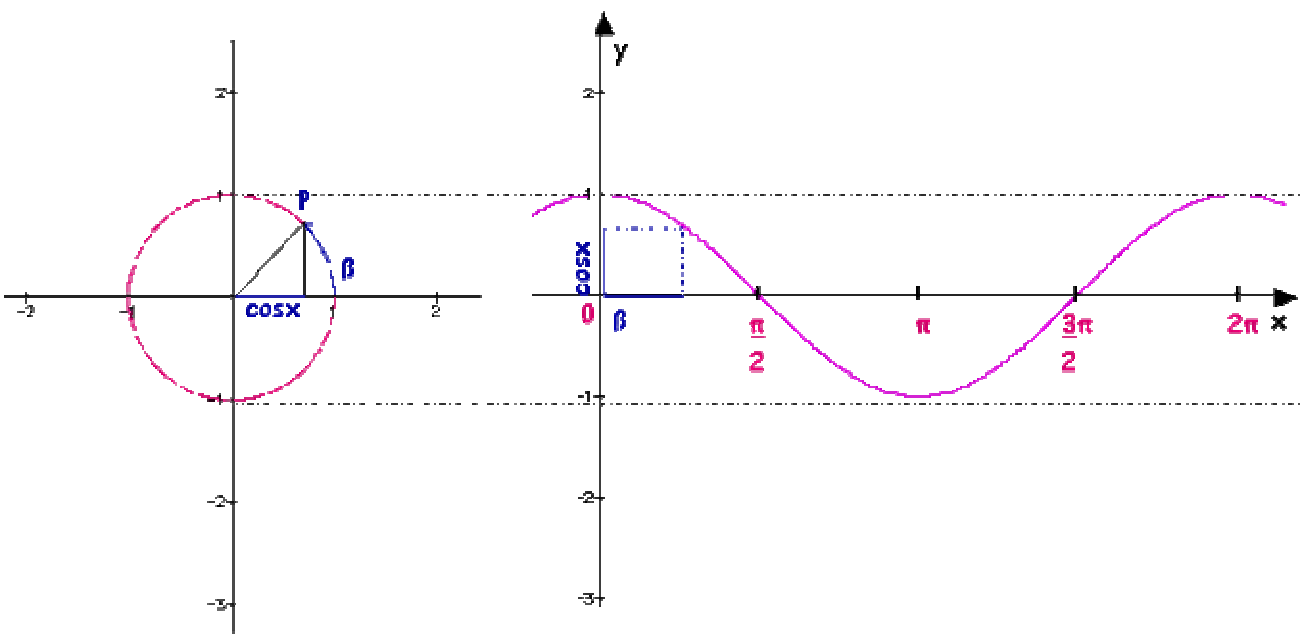
$$tg\beta = \frac{y_T}{x_T} = \frac{y_T}{1} = y_T \qquad\qquad ctg\beta = \frac{x_C}{y_C} = \frac{x_C}{1} = x_C$$

Rappresentazione delle funzioni trigonometriche

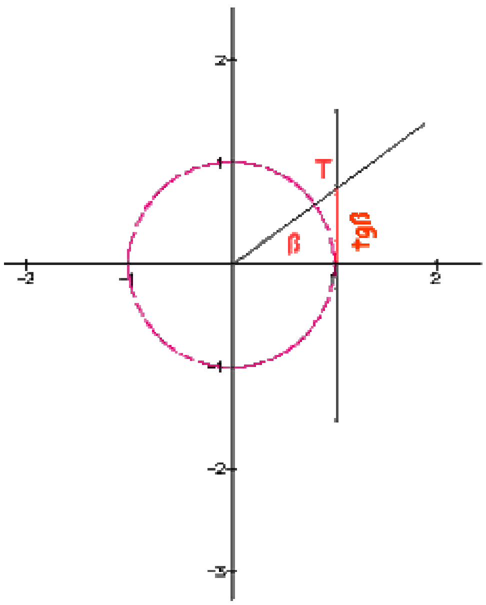
Funzione seno

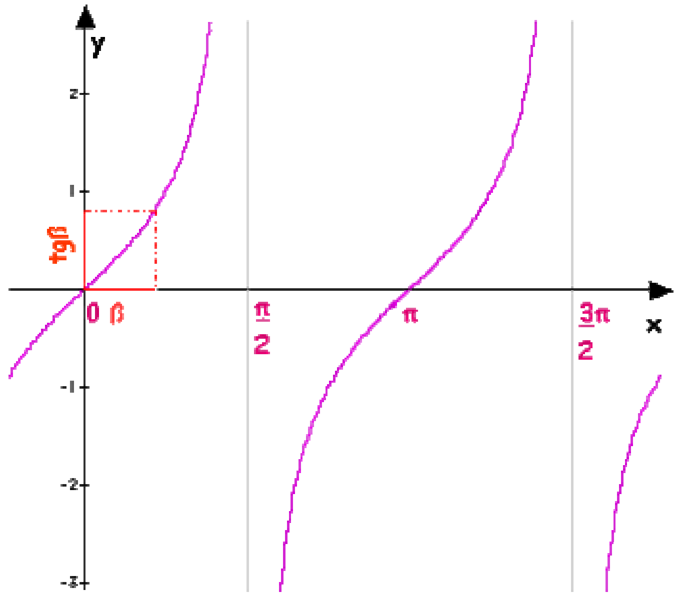


Funzione coseno

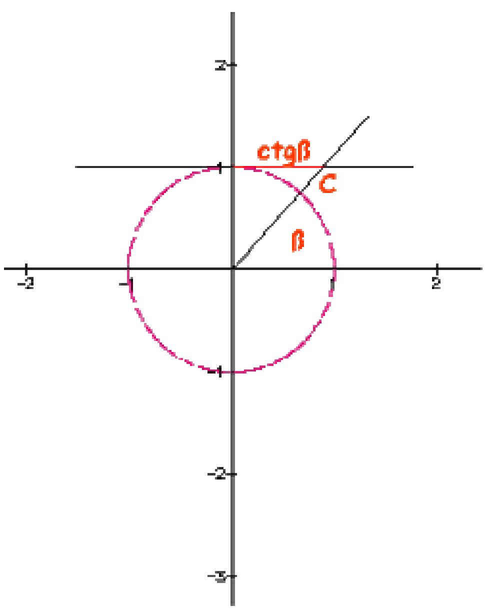


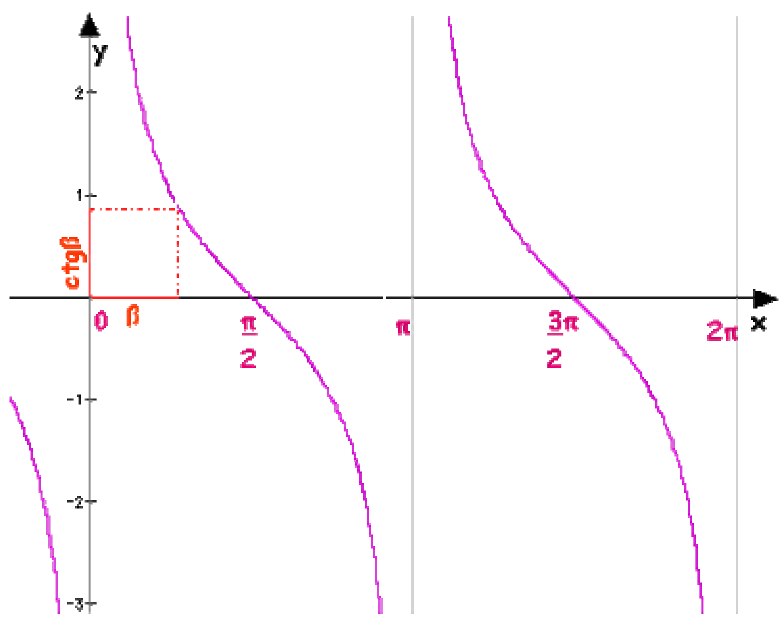
Funzione tangente





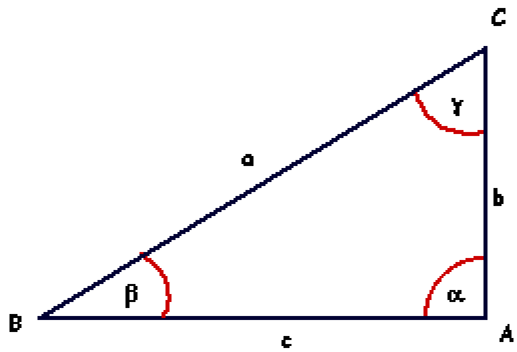
Funzione cotangente



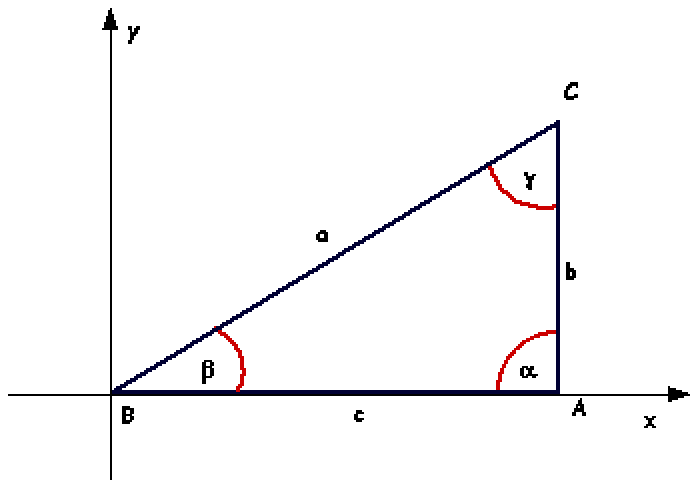


Relazione tra gli elementi di un triangolo rettangolo

Consideriamo il seguente triangolo rettangolo:



consideriamo ora lo stesso triangolo riferito però ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente l'origine in **B**, l'asse **x** nella direzione e nel verso del segmento **BA**, orientato da **B** verso **A**, il punto **C** giace nel **1° quadrante** del suddetto sistema.



Per le definizioni date di **funzioni trigonometriche** avremo:

$$sen\beta = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a}$$

$$tg\beta = \frac{b}{c} \qquad ctg\beta = \frac{c}{b}$$

da cui:

$$\boxed{\begin{array}{ll} b = a\,sen\beta & c = a\cos\beta \\ b = c\,tg\beta & c = b\,ctg\beta \end{array}}$$

Vettori e Scalari

In Fisica esistono **2 tipi di grandezze**:

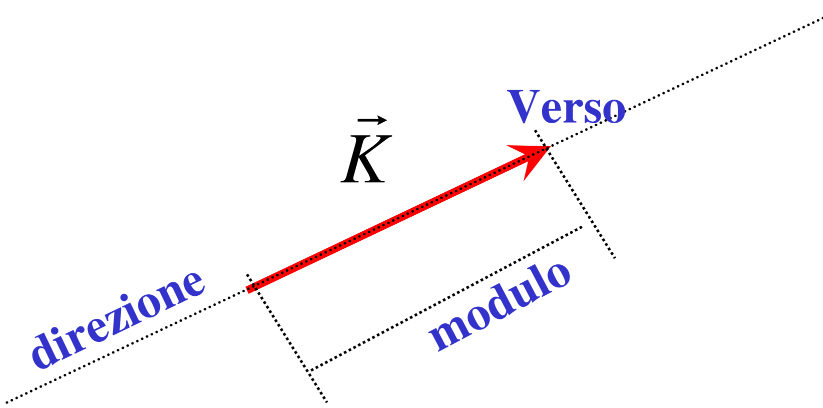
Scalari: solo valore numerico (modulo)
[massa, temperatura …]

Vettoriali: valore numerico (modulo) e
direzione orientata (direzione e verso)
[spostamento, velocità …]

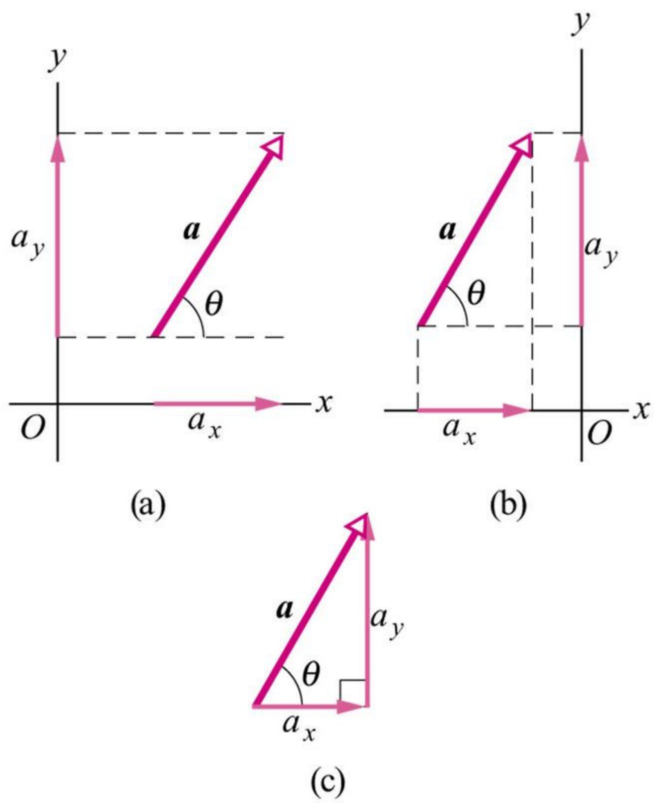
$\Downarrow$

quanto veloce $\mapsto$ modulo
in che direzione $\mapsto$ direzione
con che verso $\mapsto$ verso

La grandezza vettoriale si rappresenta graficamente con una **freccia**:
lunghezza freccia = modulo grandezza vettoriale
direzione freccia = direzione grandezza vettoriale
orientamento freccia = verso



Componenti di un vettore



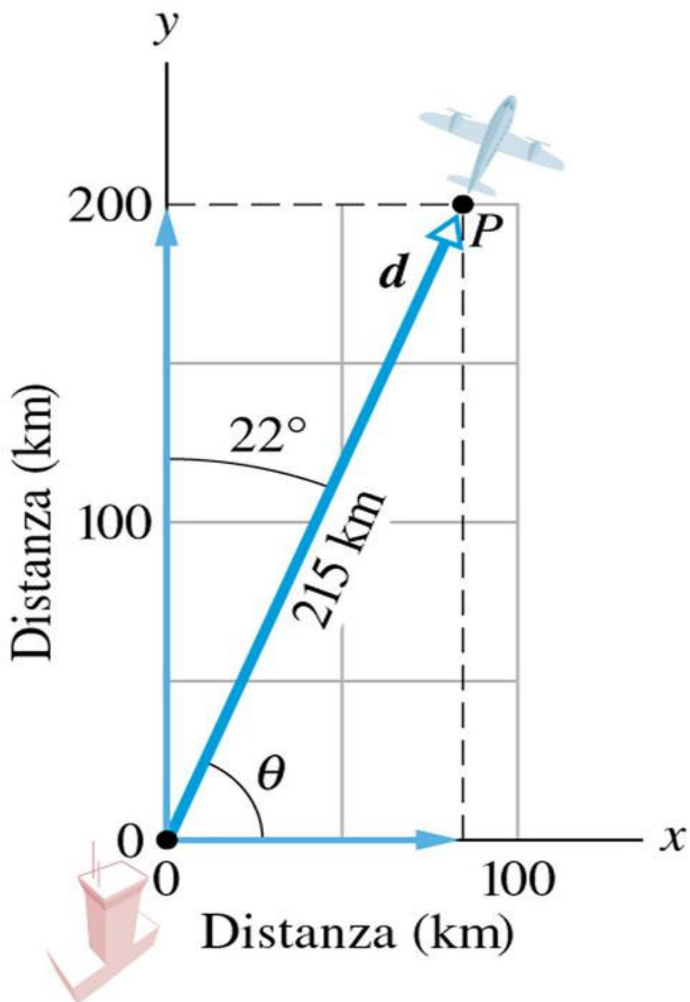
Rappresentazione cartesiana:

$$a_x = a \cos\theta$$
$$a_y = a \,\mathrm{sen}\theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

COMPONENTI DI UN VETTORE: esempio

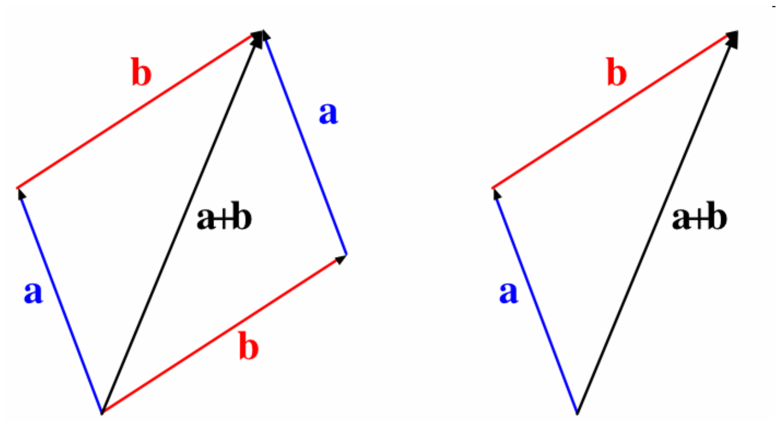


Un aeroplano decolla da un aeroporto e viene successivamente avvistato ad una distanza di 215 km dall'aeroporto e in una direzione che fa un angolo di 22° Est rispetto al Nord geografico. Quali sono le componenti della spostamento?

d_x = d cosθ = (215 km) (cos 68°) = 81 km
d_y = d senθ = (215 km) (sen 68°) = 109 km

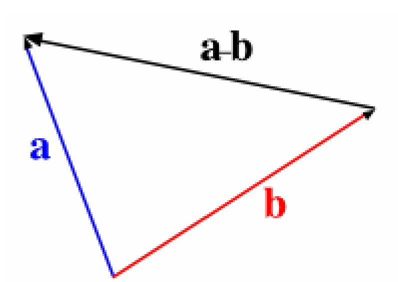
Somma e sottrazione di vettori

La **somma** di due **vettori a** e **b** aventi lo stesso punto di applicazione è definita come il vettore **a+b**, diagonale del parallelogramma formato dai **vettori a** e **b**.



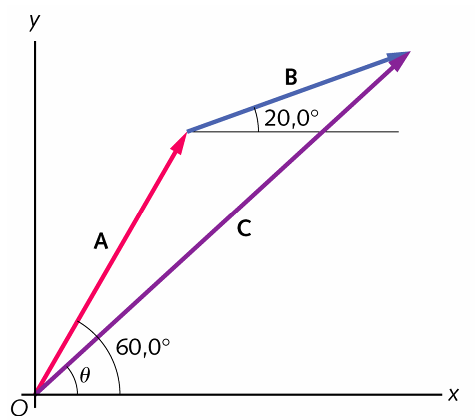
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$r_x = a_x + b_x$$
$$r_y = a_y + b_y$$
$$r_z = a_z + b_z$$

La definizione di opposto di un vettore permette di definire la differenza tra due **vettori a - b** come somma di **a** con l'opposto di **b**.

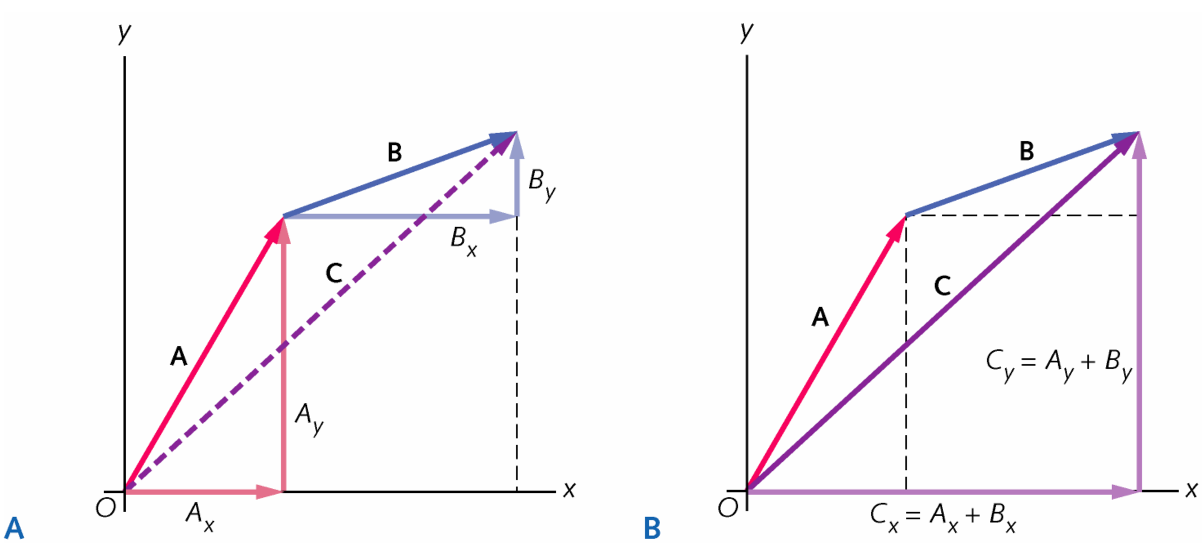


$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$$
$$r_x = a_x - b_x$$
$$r_y = a_y - b_y$$
$$r_z = a_z - b_z$$

SOMMA DI VETTORI: esempio



Il vettore A ha un modulo di 5 m e un angolo di 60°; il vettore B ha modulo di 4 m e angolo di 20°. Calcolare il modulo e il verso di C



$$\begin{cases} A_x = (5m)\ cos\ 60° = 2.5\text{m} \\ B_x = (4m)\ cos\ 20° = 3.76\text{m} \\ A_y = (5m)\ sen\ 60° = 4.33\text{m} \\ B_y = (4m)\ sen\ 20° = 1.37\text{m} \end{cases}$$

$$C_x = A_x + B_x = 6.26m$$
$$C_y = A_y + B_y = 5.70m$$

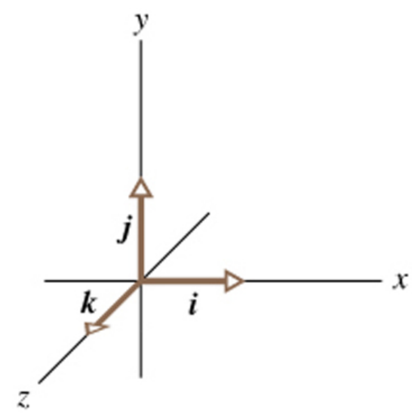
$$C = \sqrt{C_x^{\ 2} + C_y^{\ 2}} = 8.47\ m \qquad \theta = tg^{-1}\ \frac{C_y}{C_x} = 42.3°$$

Versori
[vettori unitari]

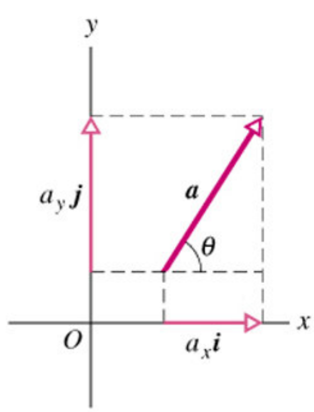
- lunghezza **unitaria** (modulo = 1)
- **privo** di dimensioni (e di unità di misura)
- indica una **direzione**

In coordinate cartesiane:

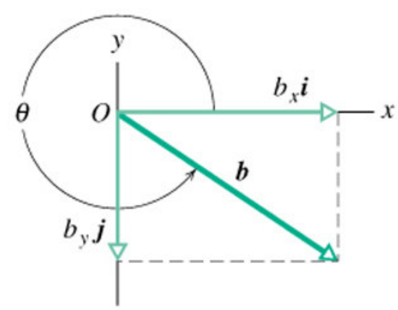
$\vec{i}$ direzione asse **x> 0**
$\vec{j}$ direzione asse **y> 0**
$\vec{k}$ direzione asse **z> 0**



Permettono la **descrizione** dei **vettori**:



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

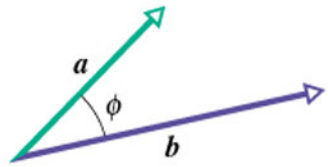


$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$$

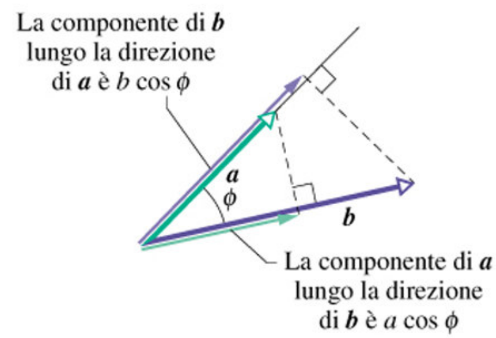
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$$ **vettore risultante**

Prodotto scalare

$\Rightarrow$ ha come risultato uno **scalare**



$$\boxed{c = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = ab\cos\phi}$$



geometricamente è il prodotto tra modulo del primo vettore e proiezione del secondo lungo la direzione del primo

N.B. $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = 0$ tra due vettori **ortogonali** ($\phi=90^0$)

$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = ab$ tra due vettori **paralleli** concordi ($\theta=0^0$)

$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = -ab$ tra due vettori **paralleli** discordi ($\theta=180^0$)

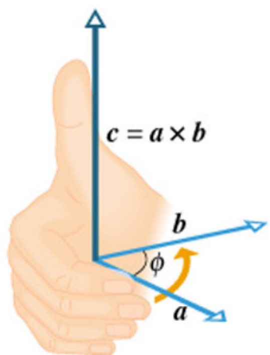
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

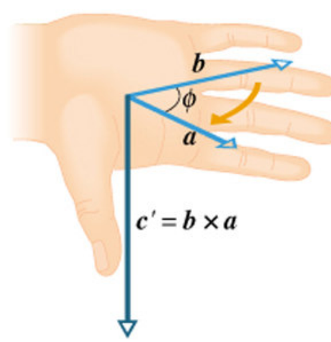
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_xa_x + a_ya_y + a_za_z = a^2$$

Prodotto vettoriale ⇒ ha come risultato un **vettore**

C = **A** x **B** = **A** ∧ **B**

Modulo	↦	|C| = |AB sen ϕ|
Direzione	↦	ortogonale al piano individuato da **A** e **B**
Verso	↦	regola mano destra





con le dita della mano destra si fa girare il vettore **A** verso il vettore **B** ⇒ il pollice indica la direzione del vettore **C**

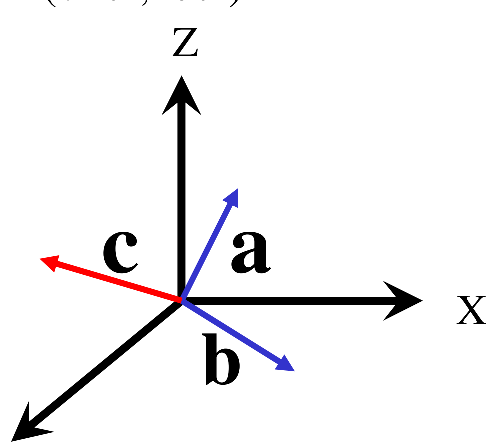
A x **B** = - **B** x **A**

N.B. |**A** x **B**| = AB tra due vettori **ortogonali** (ϕ=90^0)

|**A** x **B**| = 0 tra due vettori **paralleli** (θ=0^0,180^0)

⇒ |**A** x **A**| = 0

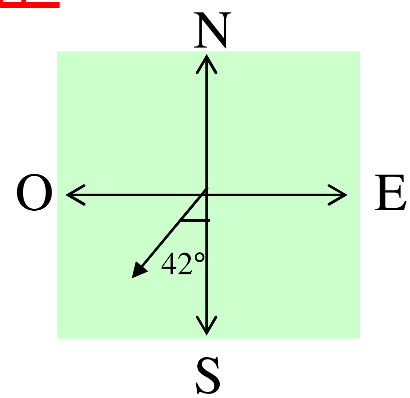
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$



$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{k}$$

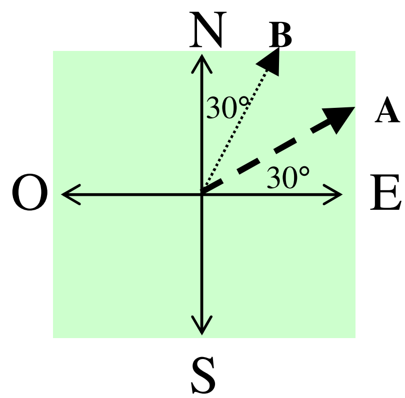
Esercizi di riepilogo

1) Un calciatore spinge la palla per una distanza di 40,0 m in una direzione che forma un angolo di 42,0° rispetto al sud.
Trova la componente in direzione ovest dello spostamento della palla.



2) Una persona cammina per 8,0 m lungo una linea retta nel quadrante nord-est e giunge in un punto posto a 4,0 m a est e a una certa distanza a nord.
Trova di quanti gradi è inclinato rispetto al nord il percorso compiuto da questa persona.

3) Un vettore **A** di 6,0 m punta a 30° a nord della direzione est, mentre il vettore **B** di 4,0 m punta a 30° a est della direzione nord.
Il vettore risultante **A**-**B** è dato da:



4) Il vettore A punta nel verso positivo dell'asse x e ha un modulo di 75 m.
Il vettore **C** = **A**+**B** punta nel verso positivo dell'asse delle y e ha un modulo di 95 m.
a) Disegna A, B e C
b) Stima il modulo e la direzione del vettore **B**

5)Determinare Ax e Ay di un vettore A con modulo e direzione rispettivamente **A** = 3.5 m e θ = 66°

6) Se l'angolo di un vettore rispetto all'asse *x* è 35°, e rispetto all'asse *y* è 55°, determina le componenti di un vettore A di modulo 5,2 m, utilizzando:
a) l'angolo del vettore rispetto all'asse *x*
b) l'angolo del vettore rispetto all'asse *y*